INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE
ET DES ÉTUDES ÉCONOMIQUES

CONCOURS POUR L'ADMISSION D'ÉLÈVES TITULAIRES STATISTICIENS ÉCONOMISTES
À L'ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ADMINISTRATION ÉCONOMIQUE

Juin 1981. — Option MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME COMPOSITION
DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

PARTIE I

Soit A une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, continue et localement lipschizienne, en tout point, par rapport à la deuxième variable.

On appelle solution de l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y' = A(x, y)$$

toute application φ continûment dérivable, définie sur un intervalle *ouvert* I_φ, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et vérifiant :

$$\forall x \in I_\varphi \qquad \varphi'(x) = A(x, \varphi(x))$$

On note Γ_φ le graphe de la solution φ.

Une solution f de (E) est dite maximale lorsqu'il n'existe aucune solution φ de (E) telle que Γ_φ contient strictement Γ_f.

1° Soient φ_1 et φ_2 des solutions de (E) telles que $\Gamma_{\varphi_1} \cap \Gamma_{\varphi_2}$ est non vide. Montrer que :

a. L'ensemble K des x de $I\varphi_1 \cap I\varphi_2$ tels que $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ n'est autre que $I_{\varphi_1} \cap I_{\varphi_2}$ (on pourra montrer que K est ouvert et fermé dans $I_{\varphi_1} \cap I_{\varphi_2}$);

b. $\Gamma_{\varphi_1} \cup \Gamma_{\varphi_2}$ est le graphe d'une solution de (E).

Tournez la page S. V. P.

2° Soient φ une solution de (E) et f une solution maximale de (E), telles que $\Gamma_\varphi \cap \Gamma_f$ est non vide. Montrer que $\Gamma_\varphi \subset \Gamma_f$.

3° Soit (x, y) un point de $\mathbb{R}^2$. On veut montrer qu'il existe une et une seule solution maximale f de (E) telle que $f(x) = y$.

a. Montrer l'unicité de f.

b. Soit I l'ensemble des réels t tels qu'il existe une solution φ de (E) vérifiant : $t \in I_\varphi$ et $\varphi(x) = y$. Montrer que I est un intervalle ouvert.

c. Construire une solution définie sur I et telle que $f(x) = y$. Conclure.

4° Soit f une solution maximale de (E). Montrer que si α est une borne finie de I_f, alors f n'a pas de limite finie en α.

Partie II

Dans toute la suite, (E) désigne l'équation différentielle $y' = 1 + xy^2$.

1° Montrer que (E) vérifie les hypothèses de (I).

2° On note f_0 la solution maximale de (E) nulle en 0. On cherche à développer f_0 en série. Dans cette question et dans la suivante, on suppose l'existence d'un tel développement en série. Montrer qu'alors :

$$f_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{3n+1},$$

où (a_n) est la suite définie par :

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ (3n+4)\, a_{n+1} = \displaystyle\sum_{q=0}^{n} a_q a_{n-q}, \text{ pour tout naturel } n. \end{cases}$$

3° Montrer que la suite $3^n a_n$ est décroissante.

4° Montrer l'existence du développement en série de f_0 et déduire de 3° un minorant de son rayon de convergence.

5° Exprimer a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 sous forme de fractions irréductibles, puis en donner des valeurs approchées à 10^{-4} près.

6° Utiliser 3° et 5° pour donner une valeur approchée de $f_0(1)$ à 10^{-3} près.

Partie III

Soit (H) l'ensemble des points (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tels que la solution maximale f de (E) vérifiant $f(x) = y$ est telle que $f'(x) = 0$. Soit (Ω) l'ensemble des points (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tels que la solution maximale f de (E) vérifiant $f(x) = y$ est telle que $f''(x) = 0$.

1° Montrer que (Ω) se compose de la droite $y = 0$ et d'un ensemble (Ω') défini par une relation $Q(x, y) = 0$ à préciser.

2° Trouver une fonction h telle que (Ω') est ainsi paramétré :

$$\begin{cases} x = h(t) \\ y = th(t) \end{cases}$$

3° Construire (Ω'). Déterminer les valeurs de t correspondant aux points d'inflexion de (Ω'). Représenter (H) et (Ω') sur la même figure.

Partie IV

Soit f une solution maximale de (E). On veut montrer que I_f est majoré. Pour cela on suppose que I_f contient le réel strictement positif a.

1° Montrer que pour tout x de $[a, +\infty[\cap I_f$, on a :

$$\frac{f'(x)}{1 + af^2(x)} \geqslant 1,$$

et en déduire que $x < a + G(a, f(a))$, où G est une certaine fonction, à exprimer à l'aide de fonctions élémentaires. Conclure. Si $\alpha = \operatorname{Sup} I_f$, que dire de $\lim_{t \to \alpha} f(t)$?

2° Appliquer la méthode à f_0 et trouver un majorant de $\operatorname{Sup} I_{f_0}$ qui utilise la valeur numérique de $f_0(1)$ trouvée en II 6°. Que peut-on préciser sur le rayon de convergence de la série étudiée en II?

Partie V

Soit f une solution maximale de (E) telle que Γ_f contient au moins un point (a, b) vérifiant $a < 0$ et $b > \dfrac{1}{\sqrt{-a}}$.

Tournez la page S. V. P.

1° Montrer que sur $]-\infty, a] \cap I_f$ la fonction f est décroissante (on pourra raisonner par l'absurde et supposer que $f'(x) = 0$ pour un élément $x < a$).

2° Montrer que I_f est minoré, en employant la même méthode qu'en IV 1° sur $]-\infty, a] \cap I_f$. Soit $\beta = Inf\ I_f$. Que dire de $\lim_\beta f$?

3° Montrer qu'il existe γ tel que $f'(\gamma) = 0$ (on pourra étudier le plus grand intervalle J inclus dans $I_f \cap]\beta, 0[$ et sur lequel f' ne s'annule pas).

4° Étudier I_f; étudier f sur $]\gamma, +\infty[\cap I_f$ (pour ces études, on pourra envisager le plus grand intervalle K inclus dans $I_f \cap]\gamma, +\infty[$ sur lequel f' ne s'annule pas et montrer que si $\delta = \text{Sup K}$, on ne peut avoir $\delta \in I_f$ et $f'(\delta) = 0$). Montrer en particulier que $I_f =]\beta, \alpha[$ avec $\alpha \geqslant 0$.

Partie VI

Soit f une solution maximale de (E) telle que Γ_f contient au moins un point (a, b) vérifiant $a < 0$ et $b < -\dfrac{1}{\sqrt{-a}}$.

Montrer que : ou bien $I_f =]-\infty, \alpha[$ avec $\alpha \geqslant 0$ et il existe γ tel que $f'(\gamma) = 0$, ou bien $I_f =]-\infty, \alpha[$ avec $\alpha \leqslant 0$ et f' ne s'annule pas. Quelles sont les limites en α dans ces deux cas?

Partie VII

Les études précédentes ont montré l'existence d'asymptotes verticales pour les graphes des solutions de (E). Inversement on étudie ici, pour un α donné, l'existence de solutions f de (E) telles que la droite $x = \alpha$ est asymptote à Γ_f.

1° Montrer que φ est une solution de (E) qui ne s'annule pas si et seulement si $\dfrac{1}{\varphi}$ est une solution de : (E′) $\quad y' = -x - y^2$.

2° Montrer que (E′) vérifie les hypothèses de I. En déduire, pour tout réel α l'existence d'une solution maximale f de (E) telle que $\text{Sup}\ I_f = \alpha$, et l'existence d'une solution maximale g de (E) telle que $\text{Inf}\ I_g = \alpha$.

3° Étudier $\lim_\alpha f$ et $\lim_\alpha g$ suivant le signe de α et en particulier pour $\alpha = 0$.

4° Préciser ainsi certains résultats de IV, V, VI. Indiquer les formes possibles des Γ_f. On montrera en particulier que si I_f est non minoré, alors $\lim_{-\infty} f = 0$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail